

# 聚 光 锥 的 分 析

王 培 纲

(中国科学院上海技术物理研究所)

**摘要**——本文从理论上研究了聚光锥的几种关系, 对大端面是平面的空心聚光锥, 带透镜的空心聚光锥, 大端面是平面和球面的实心聚光锥, 推导出一套计算公式。由于没有采用参考圆和参考球, 因而公式避免了一些近似关系。

本文还讨论了聚光锥的应用, 重点讨论聚光锥作为场光学元件时对红外系统性能的影响及其所能达到的极限。对实际设计中的一些问题也作了讨论。

## 一、简单聚光锥

一个内壁抛光良好, 半锥角为  $\eta$  的空心聚光圆锥, 在子午面内一条与光锥轴线夹角为  $V$  的光线从大端面入射, 设光线在锥壁上的第  $m$  个反射点的入射角为  $i_m$ , 反射光线与光锥轴线夹角为  $\beta_m$ , 则可以得到如下关系:

$$\begin{aligned} i_m &= 90^\circ - V - (2m-1)\eta; \\ \beta_m &= V + 2m\eta. \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)表明, 光线在锥壁上每反射一次, 入射角就减少  $2\eta$ , 与光锥轴线的夹角增加  $2\eta$ 。显而易见, 当  $\beta_m \geq 90^\circ$  时或  $i_m \leq \eta$  时, 光线将不再沿光锥轴线向前, 而开始返回大端面。

利用镜面反射特性, 可将光线在光锥中的路径展开, 在子午面内得到图1的图形。光锥小端面直径为  $2O$ , 经过多次反射, 其象形成一多边形, 设  $AB$  自  $G$  点从光锥小端面出射, 与  $GE$  夹角为  $\alpha$ , 与出射端面法线夹角为  $\beta$ , 则

$$O/S = (\cos \beta \operatorname{ctg} \alpha + \sin \beta) \cdot \left( \sin V + \frac{h}{d} \cos V \right). \quad (2)$$

如果换用光锥入射端面与出射端面之间的距离  $L$  表示, 则可以表示为

$$L = \left( 1 - \frac{O}{S} \right) \frac{h \cos V}{(O/S) / (\cos \beta \operatorname{ctg} \alpha + \sin \beta) - \sin V}. \quad (3)$$

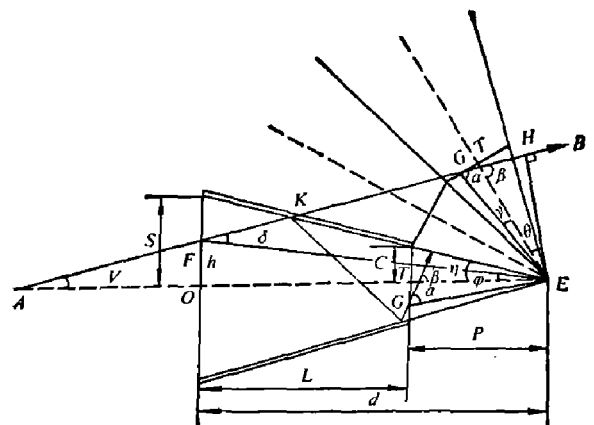


图 1

若  $\beta=90^\circ$ ,  $h=S$ , 即出射光线与光锥小端面重合, 此时的  $V$  为  $V_s$ , 则式(3)变为

$$L = \left(1 - \frac{C}{S}\right) \frac{S \cos V_s}{C/S - \sin V_s} \quad (3)$$

这就是 Williamson<sup>[1]</sup> 所找到的公式, 实际上它是式(3)的一个特例。式(2)可以改用  $\delta$  表示, 注意:  $\psi = \delta - V$ ;  $\gamma = \beta - \alpha$ 。

$E$  是光锥的顶点,  $G$  是出射光线与小端面的交点,  $\gamma$  是  $GE$  与光锥轴线的夹角, 显然  $-\eta \leq \gamma \leq \eta$ , 于是有

$$C/S = \frac{\sin \delta \cos \gamma}{\sin \alpha \cos \psi} \quad (4)$$

式(3)和式(4)与 Möller<sup>[2]</sup> 和 Burton<sup>[3]</sup> 得到的公式不同, 读者可以加以对照、比较。

为了建立缩减比  $C/S$  同光线在锥壁上反射次数的联系, 从光锥的顶点作一垂线与光线  $AB$  垂直, 用  $\theta$  表示该垂线与锥体第  $m$  次反射象 (在该反射象中, 光线穿过光锥的出射端面) 的中心线之间的夹角, 从图 1 不难得到

$$\beta = 90^\circ - \theta, \quad \theta = 90^\circ - V - 2m\eta, \quad \eta = (90^\circ - V - \theta)/2m \quad (5)$$

式中  $m$  是正整数, 代表光线在到达出射端面之前, 在锥壁上的反射次数。

在实际应用中, 通常希望在一定的  $V$  角和反射次数  $m$  下,  $C/S$  值尽可能小, 为此就需要选择合适的  $\theta$  和  $\gamma$ 。将  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\theta$ 、 $\eta$  值代入式(2)中, 有

$$C/S = [\sin \theta \operatorname{tg}(\theta + \gamma) + \cos \theta] \left[ \sin V + \frac{h}{S} \cos V \operatorname{tg} \left( \frac{90^\circ - V - \theta}{2m} \right) \right] \quad (6)$$

欲得小的  $C/S$ , 应使  $\gamma = -\eta$ , 故  $\alpha = \beta + \eta$ 。代入式(6), 若  $h=S$ , 则有

$$C/S = \frac{\sin(V + \eta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \left( V + \frac{90^\circ - V - \theta}{2m} \right)}{\cos \left( \frac{2m+1}{2m} \theta - \frac{90^\circ - V}{2m} \right)} \quad (7)$$

上式表明, 无论  $V$  值如何, 当  $m \rightarrow \infty$ ,  $\theta = 0$  时 (即  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\eta \rightarrow 0$  时),  $C/S$  有最小值  $\sin V$ 。

然而在实际应用中, 不希望  $m$  太大, 计算表明, 对于不同的  $V$  和  $m$  值, 使  $C/S$  最小的  $\theta$  (或者  $\eta$ ) 是不相同的, 结果见表 1。

从表中可见, 光线在锥壁上反射次数越多, 则  $\eta$  越小,  $C/S$  也越小。虽然较小的  $C/S$  是我们所希望的, 但  $m$  越大, 反射能量损失越大, 再者太小的  $\eta$  势必使锥体很长, 增加使用和加工的困难。因此, 需要在  $C/S$ ,  $\eta$  和  $m$  之间权衡利弊, 选择合适的  $\eta$ 。若  $h=0$ , 式(6)变为

$$C/S = \frac{\sin V \cos \eta}{\sin \alpha} = \sin V \frac{\cos \left( \frac{90^\circ - V - \theta}{2m} \right)}{\cos \left( \frac{(2m+1)\theta}{2m} - \frac{90^\circ - V}{2m} \right)} \quad (8)$$

对于实心聚光锥, 前面的讨论基本上都适用, 只需注意上述公式中的  $V$  是光线在大端面折射后的折射角  $V'$  即可, 设大端面外的介质是空气, 光锥材料的折射率为  $n$ , 则有

$$\sin V' = \frac{1}{n} \sin V \quad (9)$$

如果与光锥出射端面接触的介质材料的折射率  $n'$  小于  $n$ , 则光线在出射端面上的入射角  $\beta$  将受到全反射角的限制, 也就是  $\theta$  和  $\eta$  受到限制。由式(5)知,

$$\eta < \frac{\arcsin(n'/n) - V}{2m} \quad (10)$$

表 1 对于不同的  $V$ 、 $m$  值, 使  $C/S$  值最小的  $\theta$ 、 $\eta$  值对照表

$V$		$m$					
		5°	10°	20°	30°	40°	50°
1	$\theta$	$4.4\eta$	$3\eta$	$2.7\eta$	$2.4\eta$	$2.3\eta$	$2.1\eta$
	$\eta$	$13.28^\circ$	$14.82^\circ$	$14.89^\circ$	$13.64^\circ$	$11.63^\circ$	$9.76^\circ$
	$C/S$	0.445	0.516	0.633	0.73	0.812	0.879
3	$\theta$	$5.4\eta$	$3.9\eta$	$2.9\eta$	$2.5\eta$	$2.3\eta$	$2.2\eta$
	$\eta$	$7.46^\circ$	$8.08^\circ$	$7.87^\circ$	$7.06^\circ$	$6.02^\circ$	$4.88^\circ$
	$C/S$	0.257	0.338	0.484	0.613	0.726	0.822
5	$\theta$	$6\eta$	$4.2\eta$	$3\eta$	$2.6\eta$	$2.3\eta$	$2.2\eta$
	$\eta$	$5.31^\circ$	$5.63^\circ$	$5.38^\circ$	$4.76^\circ$	$4.07^\circ$	$3.28^\circ$
	$C/S$	0.2	0.283	0.436	0.575	0.698	0.803
7	$\theta$	$6.4\eta$	$4.3\eta$	$3.1\eta$	$2.6\eta$	$2.3\eta$	$2.2\eta$
	$\eta$	$4.17^\circ$	$4.37^\circ$	$4.09^\circ$	$3.61^\circ$	$3.07^\circ$	$2.47^\circ$
	$C/S$	0.172	0.256	0.413	0.556	0.685	0.794

## 二、带透镜的聚光锥

在光锥大端面放上一个焦距为  $f'$  的透镜  $KH$  后, 为使  $A$  点发出的充满光锥大端面  $KH$  的子午光束全部到达光锥的出射端面, 假设  $A$  点发出的光线经过透镜后全部会聚于  $G$  点(即假定  $KH$  是个理想薄透镜),  $G$  距光锥大端面距离为  $d'$ , 则问题就归结为使  $G$  点处于光锥小端面的反射象上(参看图 2)。

选光束的主光线  $AOB$  作为代表光线, 只要  $AOB$  能到达输出端面, 其他光线  $KG$ 、 $HG$  等也能到达光锥的输出端面, 这样, 带透镜的光锥就转化为一个简单空心光锥对  $AOB$  光线的求解问题。对于

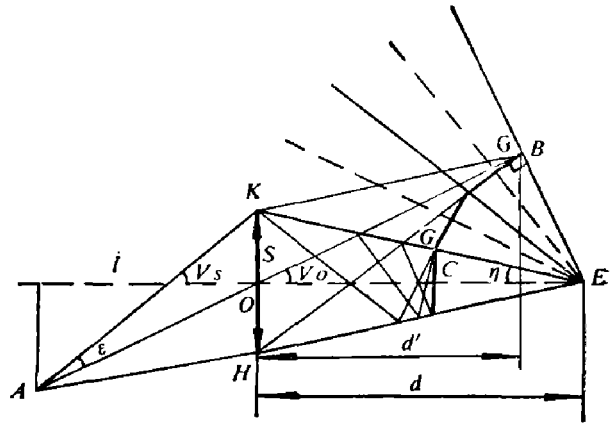


图 2

$AOB$  光线,  $h=0$ , 利用式(8), 对于不同的  $V$  和  $m$  计算表明, 若  $m > 2$ , 则  $C/S$  的最小值在  $0.9\eta < \theta < \eta$  之间, 在此区间中  $C/S$  值相差不到千分之一, 可认为  $\theta = \eta$  时,  $C/S$  最小, 于是  $\beta = 90^\circ - \eta$ ,  $\alpha = 90^\circ$  代入式(5)和式(2)遂得

$$\eta = \frac{90^\circ - V_0}{2m+1}, C/S = \cos \eta \sin V_0. \quad (11)$$

Witte<sup>[4]</sup> 利用参考圆方法曾经得到过与式(11)中第二式相同的结果, 但由于该式表明  $C/S$  可以随  $\eta$  的增大而无限减小, 他对这一结果加了二项修正。实际上, 由于  $m \neq 0$ ,  $\eta$  不可

能大于  $30^\circ$ ，这一修正并没有必要。此外，式(11)说明了 Witte 公式成立所必须的条件。

利用图 3 可以得到，透镜的  $F$  数为  $F = \frac{1}{2(\operatorname{tg} \eta \sec^2 V_0 - S/l)}$ 。一般有  $l \gg S$ ，可近为似

$$F = \frac{\cos^2 V_0}{2 \operatorname{tg} \eta} \quad (12)$$

$F$  的理论极限是 0.5。

带透镜的光锥比简单光锥在缩小出射端面方面效果更为显著。设这两种光锥有同样的锥度  $\eta$ ，光线在光锥出射端面上的入射角  $\beta$  相同，对于同样的从  $A$  点发出充满大端面  $2S$  的一束光，设带透镜的光锥得到的出射端面半径为  $O_f$ ，简单光锥的为  $O_s$ ，利用式(7)和(8)得

$$\frac{O_f}{O_s} = \cos \eta \frac{\sin V_0}{\sin(V_0 + \varepsilon + \eta)}$$

此关系表明  $O_f < O_s$ 。但是加上透镜后引起光锥的平均透过率下降将会减少这种好处。当光锥锥度小于由

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\sin V_0}{\sqrt{\rho \cos(V_0 + \varepsilon)}} - \operatorname{tg}(V_0 + \varepsilon) \quad (13)$$

确定的  $\eta$  值时，这一好处将完全失去。式中  $\rho$  为透镜的透过率。对于一般情况，由式(13)确定的  $\eta$  都很小。故光锥加上透镜后，在缩小光锥出射端面的尺寸上，通常总是比简单光锥情况有利。

对于大端面是球面的实心光锥，可以看作由一个平凸透镜与一个实心锥相接构成，利用式(9)和式(11)可得

$$O/S = \frac{1}{n} \cos \eta \sin V_0, \quad \eta = [(90^\circ - \sin^{-1}(\sin V_0/n))]/(2m+1) \quad (14)$$

可以求出球面的曲率半径  $R$  为

$$R = (n-1) \frac{dn^2 l}{nl(n^2 - \sin^2 V_0) - dn^2} \quad (15)$$

### 三、聚光锥的应用

聚光锥是一种非成像光学元件，它不能使物体清晰成象，只能用于对成象细节不加要求的

光学系统，然而由于它独特的性能，近年来不但被用在红外跟踪、辐射测量以及干涉仪中，而且在航天遥感仪器中也得到了广泛使用，如 SCR 和 PMR<sup>[5,6]</sup>，SSH<sup>[7]</sup>、VTPR<sup>[8]</sup>、SSU<sup>[9]</sup> 等。

对于红外系统，在满足象质要求等前提下，希望使用尽可能小的红外探测器，实际上就是希望系统有尽可能小的

等效  $F$  数，利用光锥作光学元件，容易使系统的等效  $F$  数减小。考虑一个用光锥作场光学元件的红外系统(见图 3)，大端面在主系统的焦面上，实际上起限制系统视场的作用， $AB$  是物镜，设它是孔径光阑，系统的等效  $F$  数为  $F_s = \frac{C}{\operatorname{tg} \alpha \cdot D}$ ，其中  $\alpha$  是系统的半视场角， $D$  是系统的入瞳直径。探测器的直径为  $2C$ ，等于光锥小端面的直径。由于  $S = f'_E \operatorname{tg} \alpha$ ，故有

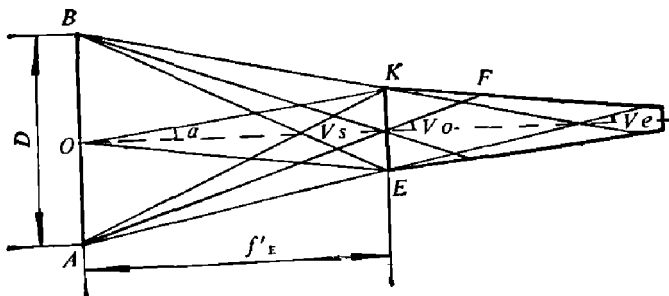


图 3

$$F_0 = (C/S) F_{\pm} \quad (16)$$

式中  $F_{\pm}$  是主光学系统的  $F$  数, 若主系统象差校正良好, 并设  $V_s \doteq V_0$ , 利用式(7)和式(16)

$$\text{可以推得 } F_0 = \frac{\sin(V_0 + \eta)}{2 \sin V_0 \cos(\theta - \eta)}。$$

前面已经证明,  $C/S$  的最小值是  $\sin V$ , 因此  $F_0$  的最小值是 0.5。实际上,  $\eta$  太小, 并不实用。若要限制  $\eta$  不小于某一值, 例如限制  $\eta > 7^\circ$ , 则有以下结果(表 2)。

表 2  $\eta > 7^\circ$  时  $F_{\pm}$ 、 $V_0$ 、 $\theta$ 、 $\eta$ 、 $m$ 、 $C/S$  和  $F_0$  之间的取值

$F_{\pm}$	$V_0$ (度)	$\theta$	$\eta$ (度)	$m$	$C/S$	$F_0$
0.577	60	$2.1\eta$	7.317	1	0.9318	0.538
0.77	40	$2.3\eta$	7.937	2	0.7546	0.586
1	30	$2.5\eta$	7.059	3	0.6131	0.613
1.93	15	$3.3\eta$	8.065	3	0.4132	0.798
2.87	10	$3.9\eta$	8.081	3	0.3383	0.974
5.74	5	$5.4\eta$	7.456	3	0.2566	1.47

上面的结果表明, 简单光锥以配用  $F$  数小的主光学系统为宜, 若  $F$  数大, 用简单光锥作场光学元件, 难以使系统具有接近 0.5 的等效  $F$  数。

对于大端面是平面的实心光锥, 利用式(9)和式(16), 有  $F_0 = \frac{\sin[\sin^{-1}(\sin V_0/n) + \eta]}{2 \sin V_0 \cos(\theta - \eta)}$ 。

可以证明  $F_0$  的最小值是  $\frac{1}{2n}$  (设与小端面接触的介质折射率  $n'$  不小于  $n$ )。实际上通常  $n' < n$ , 因此  $F_0$  的减小受到限制。一般来说, 实心光锥在获得小的  $F_0$  方面比空心光锥更有效, 很容易使  $F_0$  小于 0.5, 但由于实心锥对入射光线存在很大的吸收, 所用材料又限制工作的波段, 加上探测器与锥体浸没所造成的问题, 是否能优于空心光锥需视具体情况才能判定。

对于带透镜的空心场光锥, 利用式(11)和(16)可得

$$F_0 = \frac{1}{2} \cos \eta_0 \quad (17)$$

前面已论证,  $\eta$  不能大于  $30^\circ$ , 因此  $F_0$  的极小值是  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。在实际使用中, 为了减少边缘“漏光”, 透镜的  $F$  数不能取得太小,  $\eta$  也不能太小, 如果限制透镜的  $F$  数大于 2.3, 则利用式(11)、式(12)和式(17)求得以下结果(表 3)。

表 3  $F$  数大于 2.3 时各参量之间的关系

$F_{\pm}$	$V_0$ (度)	$\eta$ (度)	$m$	$F$	$C/S$	$F_0$
0.6	56.44	3.728	4	2.35	0.8315	0.4989
1	30	8.571	3	2.49	0.4944	0.4944
2	14.48	10.789	3	2.46	0.2455	0.4912
3	9.59	11.486	3	2.39	0.1633	0.4899
4	7.18	11.83	3	2.35	0.1223	0.4894
5	5.74	12.04	3	2.32	0.0978	0.489

对于表面是球面的实心光锥, 利用式(14)得  $F_0 = \frac{1}{2n} \cos \eta$ 。可以把它看作一个带平凸透镜的实心光锥进行分析, 其结果与带透镜的空心光锥类似。在减小  $F_0$  方面它比带透镜的空心光锥要好  $n$  倍, 但是也存在着前面已经提到的实心光锥的问题。

利用聚光锥使系统有较小的  $F_0$  是我们首先希望的, 但不是唯一的, 还必须综合考虑光锥的能量损失(如光线的反射次数  $m$ , 透镜的透过率和  $F$  数、材料的吸收、探测器与光锥出射端面的匹配等), 系统对结构的要求, 工艺上的可行性等, 以最终确定光锥的种类和锥度。

致谢——本文承匡定波同志审阅, 并提出宝贵意见, 在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Williamson D. E., *J. Opt. Soc. Amer.*, **42**(1962), 10: 712.
- [2] Möller K. D. et al, *J. Opt. Soc. Amer.*, **55**(1965), 10: 1233.
- [3] Burton C. H., *Infrared Phys.*, **15**(1975), 2: 157.
- [4] Witte W., *Infrared Phys.*, **5**(1965), 4: 179.
- [5] Abel P. G. et al, *Proc. Roy. Soc., London*, **A320**(1970), 1540: 35.
- [6] Taylor F. W. et al, *Appl. Opt.*, **11**(1972), 1: 135.
- [7] Nichol D. A., *Opt. Eng.*, **14**(1975), 4: 284.
- [8] Goldbery I. L., **NASA-TM-X-70723**(1974).
- [9] **COM-73-10929**(1973).

## ANALYSIS OF CONDENSER CONE

WANG PEIGANG

(Shanghai Institute of Technical Physics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

The various relations of the condenser cone are studied theoretically. A set of calculated equations is derived for the hollow cone whose large end is a plane; and for the hollow cone with a lens; and for the solid cone whose large end is a plane and spherical surface. These equations eliminate some approximations previously unavoidable as a result of not adopting the reference circle and reference sphere.

Applications of the condenser cone are discussed with emphasis on the effect and the limit on the performance of infrared system when it is used as a field optical element. Issues concerning practical design are also discussed.