

黑体辐射中普朗克积分的新展式

徐新闻* 王新德** 糜正瑜** 钟万蕻* 戴显熹*

(中国科学院上海技术物理研究所红外物理开放研究实验室)

摘要——讨论普朗克积分(相对波段光子出射度 $R_n(x)$ 和相对波段辐射出射度 $R_m(x)$) 在 $x \equiv h\nu/kT \leq 10$ 情况下的幂级数展开式。利用解析开拓方法避开 $x = 2\pi ni$ 处被积函数的奇性, 给出高阶系数的解析展式, 导出了 $R_n(x)$ 和 $R_m(x)$ 的若干幂级数展式, 在 $|x - x_0| \leq 1$ 时精度为 $10^{-9} \sim 10^{-10}$; 在 $|x - x_0| \leq 0.5$ 时精度为 10^{-12} 。

一、引 言

各种类型的普朗克积分, 例如辐射出射度 $M_{0,\lambda}$ 和光子出射度 $N_{0,\lambda}$ 可表示为^[1]

$$N_{0,\lambda} = K_N(\lambda T) N_{0,\infty} = \alpha T^3 R_n(x), \quad (1.1)$$

$$M_{0,\lambda} = K_M(\lambda T) M_{0,\infty} = \sigma T^4 R_m(x), \quad (1.2)$$

其中

$$\alpha = \frac{h\nu}{kT} = \frac{ch}{\lambda kT}, \quad \alpha = \frac{4\pi}{c^2} \frac{k^3}{h^3} \zeta(3), \quad \sigma = \frac{2k^4\pi^5}{15h^3c^2}, \quad (1.3)$$

$\nu, \lambda, c, T, k, \sigma$ 分别为光的频率、波长、光速、温度、玻尔兹曼常数和斯忒藩-玻尔兹曼常数。我们已经获得 $x \geq 2$ 的和 $x \leq 2$ 的 $R_n(x)$ 和 $R_m(x)$ 的各种展式^[1]。数值计算表明, 幂级数表示在一般程序中远比指数表示省时间。为了提高计算速度, 希望在较大的 x 值时, 仍运用幂级数表示。虽然 $R_n(x), R_m(x)$ 的 Bernoulli 数展开式的收敛半径可达 2π , 但 $x > 2$ 时收敛慢。此外, $|x| > 2\pi$ 时, 下列公式不再适用:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \quad (1.4)$$

因为 $x = 2\pi ni$ 为母函数的奇点。但是, 我们可以通过解析开拓的办法, 绕过这些奇点。

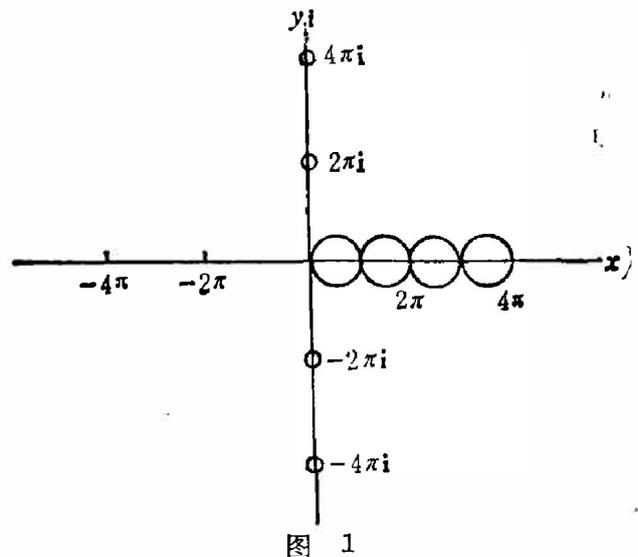


图 1

* 复旦大学物理系

** 中国科学院上海技术物理研究所

这个解析开拓的方案是可行的, 只要将 Taylor 级数分别在不同的区间写出, 使其在运用的各区间内没有奇点。这将是解析开拓思想的一个具体应用(见图 1)。

二、 $R_n(x)$ 和 $R_m(x)$ 的幂级数系数的递推式

$R_n(x)$, $R_m(x)$ 的这种解析开拓不但具有应用背景, 而且在数学上也是自然的, 方便的。因为它们各阶微商全部均是初等函数:

$$\frac{d}{dx} R_m(x) = -\frac{15}{\pi^4} x^3 b(x), \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dx} R_n(x) = -\frac{x^2}{2\zeta(3)} b(x), \quad (2.2)$$

其中

$$b(x) = (e^x - 1)^{-1}, \quad (2.3)$$

则
$$R_m(x) = R_m(x_0) - \frac{15}{\pi^4} x_0^3 b(x_0) (x - x_0) + \sum_{l=2}^{\infty} R_m^{(l)}(x_0) \frac{(x - x_0)^l}{l!}, \quad (2.4)$$

$$R_n(x) = R_n(x_0) - \frac{x_0^2 b(x_0)}{2\zeta(3)} (x - x_0) + \sum_{l=2}^{\infty} R_n^{(l)}(x_0) \frac{(x - x_0)^l}{l!}. \quad (2.5)$$

再利用 Leibnitz 公式, 得:

$$R_m^{(n)}(x) = -\frac{15}{\pi^4} [x^3 b^{(n-1)}(x) + 3x^2(n-1)b^{(n-2)}(x) + 3(n-1)(n-2)xb^{(n-3)}(x) + (n-1)(n-2)(n-3)b^{(n-4)}(x)], \quad (2.6)$$

$$R_n^{(n)}(x) = -\frac{1}{\zeta(3)} [x^2 b^{(n-1)}(x) + 2(n-1)xb^{(n-2)}(x) + (n-1)(n-2)b^{(n-3)}(x)]. \quad (2.7)$$

三、 $b^{(n)}(x)$ 的递推式

为保证 $R_m(x)$, $R_n(x)$ 的幂级数精度为 $10^{-8} \sim 10^{-10}$, $|\Delta x| \leq 1$, 一般要用到 $b(x)$ 的直到 12 阶的微商, 这不是轻而易举的事; 为此, 我们设计了两种方案。

方案 I. $b(x)$ 的高阶微商用低阶微商递推表示, 详细的计算结果为:

$$\begin{aligned} b'(x) &= -b(b+1), \\ b''(x) &= -b'[1+2b], \\ b'''(x) &= -2b'^2 - (1+2b)b'', \\ b^{(4)}(x) &= -6b'b'' - (1+2b)b''', \\ b^{(5)}(x) &= -6(b'')^2 - 8b'b''' - (1+2b)b^{(4)}, \\ b^{(6)}(x) &= -20b''b''' - 10b'b^{(4)} - (1+2b)b^{(5)}, \\ b^{(7)}(x) &= -20(b''')^2 - 30b''b^{(4)} - 12b'b^{(5)} - (1+2b)b^{(6)}, \\ b^{(8)}(x) &= -70b'''b^{(4)} - 42b''b^{(5)} - 14b'b^{(6)} - (1+2b)b^{(7)}, \\ b^{(9)}(x) &= -70[b^{(4)}]^2 - 112b'''b^{(5)} - 56b''b^{(6)} - 16b'b^{(7)} - (1+2b)b^{(8)}, \\ b^{(10)}(x) &= -252b^{(4)}b^{(5)} - 168b'''b^{(6)} - 72b''b^{(7)} - 18b'b^{(8)} - (1+2b)b^{(9)}, \\ b^{(11)}(x) &= -252[b^{(5)}]^2 - 420b^{(4)}b^{(6)} - 240b'''b^{(7)} - 90b''b^{(8)} - 20b'b^{(9)} - (1+2b)b^{(10)}, \\ b^{(12)}(x) &= -924b^{(5)}b^{(6)} - 660b^{(4)}b^{(7)} - 330b'''b^{(8)} - 110b''b^{(9)} - 22b'b^{(10)} - (1+2b)b^{(11)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

方案II. 将 $b^{(n)}(x)$ 展开为 $b(x)$ 的多项式

例如:

$$b'(x) = -b - b^2,$$

$$b''(x) = b + 3b^2 + 2b^3, \quad (3.2)$$

一般地, 令

$$b^{(k)}(x) = \sum_{\nu=1}^{k+1} \alpha_k(\nu) b^\nu(x), \quad (3.3)$$

可证明, 系数存在下列递推关系:

$$\begin{cases} \alpha_{k+1}(1) = -\alpha_k(1) = (-1)^{k+1}, \\ \alpha_{k+1}(k+2) = -(k+1)\alpha_k(k+1), \\ \alpha_{k+1}(\nu) = -[\nu\alpha_k(\nu) + (\nu-1)\alpha_k(\nu-1)], \quad (\nu=2, \dots, k), \end{cases} \quad (3.4)$$

由此, 可以导出 $b(x)$ 的前 12 阶导数的以 $b(x)$ 多项式表示的表式, 其系数列于表 1 中。

四、 $R_m(x)$ 和 $R_n(x)$ 的幂级数展式

1. 关于 x_0 的选取

我们准备在 $x \leq 10$ 的范围内运用幂级数展式。在 $0 \leq x \leq 2$ 区域内, 文献 [1] 中已经给出了 $R_m(x)$, $R_n(x)$ 的幂级数展式。在 $x \geq 10$ 的区域内, 我们可以运用下列指数展式:

$$R_n(x) = \frac{1}{2\zeta(3)} \left\{ -x^2 \ln(1 - e^{-x}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \left[\frac{1}{n^3} + \frac{x}{n^2} \right] \right\}, \quad (4.1)$$

$$R_m(x) = \frac{15}{n^4} \left\{ -x^3 \ln(1 - e^{-x}) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \left[\frac{2}{n^4} + \frac{2x}{n^3} + \frac{x^2}{n^2} \right] \right\}. \quad (4.2)$$

因为 $x \geq 10$ 时, 上列公式收敛很快, 只要取 $n=2$ 即可准确到 10^{-8} 以上。

在 $2 \leq x \leq 10$ 范围内, 要视 Taylor 展式的 $|x - x_0|$ 的宽度。如果取 $|x - x_0| \leq 1$, 则需取

$$x_0 = 3, 5, 7, 9. \quad (4.3)$$

如果要求 $|x - x_0| \leq 0.5$, 则取

$$x_0 = 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5. \quad (4.4)$$

对这少数几个点的 $R_n(x_0)$, $R_m(x_0)$ 的值, 可以运用式 (4.1) (4.2) 算出, 准确到 10^{-12} 以上。

2. 系数的计算方案

方案 II 将 $b^{(k)}(x)$ 用 b 的多项式表示, 一般包含的系数较大, $b^{(12)}(x)$ 的多项式系数可高达 11 位数字, 又因 $b^{(k)}(x)$ 在 x 较大时一般很小, 大都是 $b(x)$ 的量级, 因此式 (3.3) 就很难算得准确。方案 I 就不同了, $b^{(12)}(n)$ 的混合表示系数不超过 924。再加上各低阶微商本来是应该算的, 因此在计算机计算中反而显得方便, 而且实用、准确。故我们将运用式 (3.1) 计算下列系数:

$$B_n(K, x_0) \equiv R_n^{(k)}(x_0)/k!, \quad B_n(0, x_0) \equiv R_n(x_0); \quad (4.5)$$

$$B_m(K, x_0) \equiv R_m^{(k)}(x_0)/k!, \quad B_m(0, x_0) \equiv R_m(x_0);$$

为保证 $R_n(x)$ 和 $R_m(x)$ 的展式的精度在 $10^{-9} \sim 10^{-12}$ 范围内, 我们计算了 $x_0 = 3, 5, 7, 9$ 的 $B_n(x_0)$, $B_m(x_0)$ 及它们的前 12 阶微商值, 准确到 12 位有效数字, 列于表 2 中, 则有:

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{12} B_n(K, x_0) (x - x_0)^k; \quad (4.6)$$

$$R_m(x) = \sum_{k=0}^{12} B_m(K, x_0) (x - x_0)^k; \quad (4.7)$$

表1 $b(x)$ 前12阶导数的多项式系数 $\alpha_k(\nu)$ (用 $A(K, \nu)$ 表示)

Table 1 Coefficients $\alpha_k(\nu)$ expressed by $A(K, \nu)$ corresponding to $K=1\sim 12$

A(1, 1)	-1	A(9, 2)	-511
A(1, 2)	-1	A(9, 3)	-18660
A(2, 1)	1	A(9, 4)	-204630
A(2, 2)	3	A(9, 5)	-1020600
A(2, 3)	2	A(9, 6)	-2739240
A(3, 1)	-1	A(9, 7)	-4233600
A(3, 2)	-7	A(9, 8)	-3780000
A(3, 3)	-12	A(9, 9)	-1814400
A(3, 4)	-6	A(9, 10)	-362880
A(4, 1)	1	A(10, 1)	1
A(4, 2)	15	A(10, 2)	1023
A(4, 3)	50	A(10, 3)	57002
A(4, 4)	60	A(10, 4)	874500
A(4, 5)	24	A(10, 5)	5921520
A(5, 1)	-1	A(10, 6)	21538440
A(5, 2)	-31	A(10, 7)	46070640
A(5, 3)	-180	A(10, 8)	59875200
A(5, 4)	-390	A(10, 9)	46569600
A(5, 5)	-360	A(10, 10)	19958400
A(5, 6)	-120	A(10, 11)	3628800
A(6, 1)	1	A(11, 1)	-1
A(6, 2)	63	A(11, 2)	-2047
A(6, 3)	602	A(11, 3)	-173052
A(6, 4)	2100	A(11, 4)	-3669006
A(6, 5)	3360	A(11, 5)	-33105600
A(6, 6)	2520	A(11, 6)	-158838240
A(6, 7)	720	A(11, 7)	-451725120
A(7, 1)	-1	A(11, 8)	-801496080
A(7, 2)	-127	A(11, 9)	-898128000
A(7, 3)	-1932	A(11, 10)	-618710400
A(7, 4)	-10206	A(11, 11)	-239500800
A(7, 5)	-25200	A(11, 12)	-39916800
A(7, 6)	-31920	A(12, 1)	1
A(7, 7)	-20160	A(12, 2)	4095
A(7, 8)	-5040	A(12, 3)	523250
A(8, 1)	1	A(12, 4)	15195180
A(8, 2)	255	A(12, 5)	180204024
A(8, 3)	6050	A(12, 6)	1118557440
A(8, 4)	46620	A(12, 7)	4115105280
A(8, 5)	166824	A(12, 8)	9574044480
A(8, 6)	317520	A(12, 9)	14495120640
A(8, 7)	332640	A(12, 10)	14270256000
A(8, 8)	181440	A(12, 11)	8821612800
A(8, 9)	40320	A(12, 12)	3113510400
A(9, 1)	-1	A(12, 13)	479001600

表 2 $B_m(x)$ 、 $B_n(x)$ 的幂级数展开式前 13 项系数 ($x_0=3, 5, 7, 9$)

Table 2 Coefficients $B_m(K, x_0)$ and $B_n(K, x_0)$ corresponding to $x_0=3, 5, 7, 9$ and $K=0\sim 12$.

x_0	K	$B_m(K, x_0)$	$B_n(K, x_0)$
3.0	0	.6069845597266D+00	.8586980704978D+00
3.0	1	-.2178467826124D+00	-.1961476479116D+00
3.0	2	.5707116951679D-02	.3782992096566D-01
3.0	3	.1000087447170D-01	.5980650408366D-03
3.0	4	-.1859751755387D-02	-.1824023122987D-02
3.0	5	-.8160859841161D-04	.4129265816877D-03
3.0	6	.8189498501414D-04	-.4096412784889D-04
3.0	7	-.1355739125653D-04	-.5029392870222D-06
3.0	8	.5960740990020D-06	.6833913794535D-06
3.0	9	.1460157934591D-06	-.7101478340259D-07
3.0	10	-.2721296555972D-07	-.3197919906058D-08
3.0	11	.6666736015143D-09	.1569334667378D-08
3.0	12	.3945560336675D-09	-.1242635625104D-09
x_0	K	$B_m(K, x_0)$	$B_n(K, x_0)$
5.0	0	.2454669107907D+00	.1039881362044D+00
5.0	1	-.1305766516688D+00	-.7054215661997D-01
5.0	2	.2655822380563D-01	.2140191380942D-01
5.0	3	-.1138250051897D-02	-.3468511715153D-02
5.0	4	-.6086694416103D-03	.1914518522756D-03
5.0	5	.1469914999915D-03	.4877774579650D-04
5.0	6	-.1233983582943D-04	-.1479604299388D-04
5.0	7	-.9578041408206D-06	.2019024612231D-05
5.0	8	.4112207775131D-06	-.1311732009607D-06
5.0	9	-.5477178279816D-07	-.6269987132842D-08
5.0	10	.2748816290767D-08	.2613606122843D-08
5.0	11	.3330129704823D-09	-.2952956491354D-09
5.0	12	-.8527534731368D-10	.8068756692167D-11
x_0	K	$B_m(K, x_0)$	$B_n(K, x_0)$
7.0	0	.7557360958472D-01	.2466431993408D-01
7.0	1	-.4820817834330D-01	-.1860269604971D-01
7.0	2	.1379576538669D-01	.6652309490670D-02
7.0	3	-.2147381920816D-02	-.1462190552368D-02
7.0	4	.1352874424679D-03	.2088683402857D-03
7.0	5	.1801817980512D-04	-.1691776582083D-04
7.0	6	-.5819826925801D-05	-.2317500661913D-06
7.0	7	.7336695879421D-06	.3114878697498D-06
7.0	8	-.3893187643941D-07	-.5395911649278D-07
7.0	9	-.3489465943617D-08	.5505427193025D-08
7.0	10	.1053537165339D-08	-.3012990036920D-09
7.0	11	-.1265697729006D-09	-.9711329288035D-11
7.0	12	.8152701351099D-11	.4417707092272D-11
x_0	K	$B_m(K, x_0)$	$B_n(K, x_0)$
9.0	0	.1961297996512D-01	.5184895736310D-02
9.0	1	-.1385551136701D-01	-.4158466993269D-02
9.0	2	.4619358847497D-02	.1617438237963D-02
9.0	3	-.9414714432420D-03	-.4023749044164D-03
9.0	4	.1238411666762D-03	.7069980192325D-04
9.0	5	-.9127288539986D-05	-.9023808093658D-05
9.0	6	-.1323738247574D-06	.7958083122756D-06
9.0	7	.1414558259180D-06	-.3333600454707D-07
9.0	8	-.2160852229869D-07	-.3244384642043D-08
9.0	9	.1887301386149D-08	.8868705005953D-09
9.0	10	-.7459683193650D-10	-.1110758638098D-09
9.0	11	-.6249686594612D-11	.9344060207613D-11
9.0	12	.1555196139620D-11	-.4849474304914D-12

由表 2, 式(4.6)、(4.7)并改进文献[1]中的(5.21), (3.17), 即可获得 $x \leq 10$ 情况下的 $|\Delta x| < 1$ 的展式, 精度保证在 10^{-9} 以上。当 $x > 10$ 时, 可运用式(4.1)、(4.2), 只须取 $n=2$ 即可。从而整个区域上的普朗克积分数值就可以方便地算出。

五、 $\zeta(3)$ 的精密计算及公式的校验

这些展式的另一类重要的工作, 是误差的确定和仔细的检验。估计这些展式的精度是个相当复杂的问题, 但这对于实际应用都是十分重要的。我们在文献[1]中已给了 $x \leq 2$ 时的 $R_m(x)$, $R_n(x)$ 展式的误差估计, 以及 $x \geq 2$ 的 $R_m(x)$, $R_n(x)$ 的指数展式的误差估计。为了实现 $2 \leq x \leq 10$ 情况下 $R_m(x)$, $R_n(x)$ 的幂级数的误差估计, 利用了 Lagrange 型余项:

$$|\Delta_n| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \quad (5.1)$$

$(x_0-1 < \xi < x_0+1)$

因为我们取间隔 $|x-x_0| < 1$, 由我们所得之系数看出, 展式误差将比 10^{-10} 小。

为了实现实际比对, 我们选取误差最大的点(取 $x-x_0 = \pm 1$)的幂级数结果与精密算出的指数展式结果作比较。实现这个精密比对的关键之一, 是获得 $\zeta(3)$ 的 12 至 14 位有效数字。不然, 两公式很难获得一致的结果。同时, $\zeta(3)$ 作为黑体辐射中出现的基本数字, 细致地计算一下也是必要的。文献[2]对 $\zeta(3)$ 运用了下列近似:

$$\zeta(3) \simeq \zeta(3, 100051) \equiv \sum_{n=1}^{100051} \frac{1}{n^3} = 1.20205690, \quad (5.2)$$

由于没有明确的误差估计, 使用时没有保证。我们在实际计算中也发现这个值妨碍了两类展式的严密比对。我们可靠地估计了这个值的误差, 发现它是 0.5×10^{-8} , 从而解释了两类展式计算结果的分歧的原因。

为了使这个数值计算精确化, 我们求出了 10100 项的和。后来发现计算机计算中的误差积累也是可观的。对这类数值的精密计算, 宜采用手续简单而精密的方法。为此, 我们运用下列数学定理:

[定理] 对一切递降正项级数:

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} u(n), \quad \Sigma(N) = \sum_{n=1}^N u(n), \quad (5.3)$$

存在下列近似值表示:

$$\Sigma \simeq \Sigma(N) + \int_N^{\infty} u(n) dn - \frac{1}{2} u(N), \quad (5.4)$$

误差为

$$|\Delta_N| < \frac{1}{2} u(N). \quad (5.5)$$

因此我们有:

$$\zeta(3) \simeq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{N^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{N^3}, \quad (5.6)$$

$$|\Delta_N| < \frac{1}{2} \frac{1}{N^3}. \quad (5.7)$$

为了避免误差积累过大, 我们先计算 $\zeta(3) - 1.2020569031591$, 然后再加上这个常数项。采用了上面的各个措施后, 计算 10^4 项, 即可精确到 5×10^{-13} 。实际计算表明, 计算到 $N =$

30000 项时, 已准确到 10^{-14} , 因此我们得到的 $\zeta(3)$ 的数值为:

$$\zeta(3) \doteq 1.2020569031596. \quad (5.8)$$

它的精度至少保证在 5×10^{-13} 范围内。

运用这个数值, 我们成功地实现了两类展式的严密比对。结论是: 我们所获得的幂级数展开式, 当 $x_0 \leq 10$, $|x - x_0| < 0.5$ 时, 有 5×10^{-13} 的精度。在此精度下, 与作了严格可靠的误差估计的指数展式是一致的。

总之, 我们获得了黑体辐射物理量在各种条件下的解析表示, 并带有可靠的误差估计, 为科学的程序设计及程序库的建立提供必要的准备。

参 考 文 献

- [1] 戴显熹, 王新德、徐新闻, 红外研究, 5(1986), 4:247~256.
[2] 朱焕文等编, 黑体辐射数据表, 科学出版社, 1984.

SOME NEW EXPRESSIONS OF PLANCK INTEGRALS LN BLACKBODY RADIATION

XU XINWENG* WANG XINDE** MI ZHENGYU** ZHONG WANHENG* DAI XIANXI*

(Laboratory for Infrared Physics, Shanghai Institute of Technical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Some expressions of Planck integrals (the relative photon radiant exitance $R_n(x)$ and the relative radiant exitance $R_m(x)$ for $x = h\nu/kT \leq 10$) are derived with accuracy of $10^{-9} \sim 10^{-10}$ for $|x - x_0| \leq 1$ or 10^{-12} for $|x - x_0| \leq 0.5$. By means of analytic continuation, the singularities of integrands at $x = 2\pi n i$ are avoided. Analytic expressions of higher order coefficients are given. The accuracy of the expressions is checked in detail.

* (Department of physics, Fudan University)

** (Shanghai Institute of Technical physics, Academia Sinica)