

对称变换及其在阿达玛变换 光谱术中的应用

张复礼 田元英

(天津大学物理系, 天津, 300072)

摘要——探讨了推出对称矩阵 $\pi_2 = \pi_1 = \pi_2$ 的方法, 实际应用于单编码 255 阶阿达玛变换光谱仪, 测得汞灯 $1.5 \mu\text{m}$ 线光谱, 节省了内存和计算量。

关键词——阿达玛变换, 对称变换, 光谱术。

1. 引 言

阿达玛变换光谱术^[1]是一种有广阔应用前景的多路调制技术, 特别适用于红外弱信号的测量。在阿达玛变换光谱仪(HTS)中, 我们实际采用 $n = 2^m - 1$ 阶的 S 矩阵编码, 为了进行快速阿达玛变换(FHT)^[2], 必须先构造置换矢量 π_1 和 π_2 , 校正编码。文献[3]指出, 总可以设法找到与 π_1 变换相同的 π_2 变换, 当 $\pi_1 = \pi_2$ 时, 称为对称变换或对称置换, 以 π_s 来表示。本文探讨了采用对称置换的 FHT 的具体算法, 编制了有关程序, 在使用 255 阶单编码 HST 测量汞灯 $1.53 \mu\text{m}$ 线光谱的实验中, 成功地运用这一算法对测量数据进行了解码。

2. 解码方程与对称置换 π_s

HTS 的解码方程为

$$\hat{\psi} = S_n^{-1} \eta = \frac{2}{n+1} T_n \eta; \quad (1)$$

式(1)中, $\hat{\psi}$ 为光谱强度估算值矩阵; η 为测量值矩阵; S_n^{-1} 是元素为 1 和 0 的 n 阶 s 矩阵的逆矩阵; T_n 是由 +1 和 -1 构成的 n 阶方阵, 以 -1 代替转置矩阵 S_n^T 中的 0, 并保持 S_n^T 中的 +1 不变即可得出。

在进行 FHT 运算之前, π_1 变换可直接由 S 矩阵求出, 需要 nm 次运算, 其中 m 是 M 序列的级数, $n = 2^m - 1$; 其运算量不很复杂, 但在构造 π_2 变换时, 首先要构造西尔维斯特型阿达玛矩阵 H_s , 然后再找出由 H_s 导出的矢量 F 与 π_1 的对应关系, 则约需 n^2 次运算, 这要占

据大量内存, 其运算量远远超过了 FHT 本身的运算量, 仅构造 H , 就要占用 n^2 个内存单元, 当矩阵阶数较高时, 内存较小的微机就无法胜任. 采用对称 π_s 置换则可使寻求 π_s 的计算量由 n^2 减去 $n \cdot m$, 不必构造西尔维斯特型阿达玛矩阵 H , 减少了用于译码的存储量, 当使用单板机时其优点更为突出.

欲求 π_s , 首先要构造自然移位型 M 序列, 再由 M 序列产生 S 矩阵, 然后求出 π_s , 进行 FHT 运算.

3. 构造自然移位型 M 序列

对于一个 S 序列, 若 $S_{2i}^N = S_i^N$, 对所有的 i 都成立, 则称该 S 序列为自然移位型, 上标 N 是自然移位型的标志.

设 m 次二进制原多项式为

$$x^m + a_m x^{m-1} + a_{m-1} x^{m-2} + \dots + a_{j-1} x^{j-2} + \dots + a_2 x + a_1; \quad (2)$$

式(2)中, 系数 a_j 为 0 或 1(可由表 1 查知).

表 1 产生自然移位型的 m 序列的参数^[2]

Table 1 Parameters for generating m -sequence in natural shift.

m	二进制原多项式	种子
3	$x^3 + x + 1$	1
4	$x^4 + x + 1$	8
5	$x^5 + x^2 + 1$	9
6	$x^6 + x + 1$	32
8	$x^8 + x^6 + x^5 + x + 1$	104
10	$x^{10} + x^3 + 1$	128

当移位寄存器启动时, S^N 序列初值系由表 1 的“种子”给出了 S_1, S_2, \dots, S_m , 则

$$S_{i+m} = a_m S_{i+m-1} + \dots + a_2 S_{i+1} + a_1 S_i, \quad (i=1, 2, \dots, n-m); \quad (3)$$

利用循环的模 2 加法

$$S_{i+m} = \text{MOD}(S_{i+m}, 2),$$

即 $1+0=0+1=1, 0+0=1+1=0$, 就可得出 S_1, S_2, \dots, S_n . 将自然移位型 m 序列左移一位作为 S 矩阵第一行, 其它各行均由其上一行左移一位而得.

4. 求 π_s

若 $S_{c_i}^N = 1, S_{c_i+c_j}^N = 0 (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m)$; 而且对所有的 i, j 都成立, 则第 c_1, c_2, \dots, c_m 列给出一组 π_s 变换. 实际应用中为了调整光谱估算值 ψ 的相位, 提高测量精度, 引进参数 $\epsilon = \frac{n-1}{2}$, 由表 2 查出 c_1, c_2, \dots, c_m , 取 S 矩阵中的 $c_1 + \epsilon + 1, c_2 + \epsilon + 1, \dots, c_m + \epsilon + 1$ 纵列可得到 π_s :

$$\begin{aligned} \pi_s(i) = & S_{i, c_1 + \epsilon + 1} 2^{m-1} + S_{i, c_2 + \epsilon + 1} 2^{m-2} + \dots + S_{i, c_j + \epsilon + 1} 2^{m-j} + \dots \\ & + S_{i, c_m + \epsilon + 1} \cdot 2^0, \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4)$$

表 2 寻求 π_s 的列序数 $C_i (i=1, \dots, m)^{[3]}$
Table 2 Columns to generate π_s .

序列(m)	C_1, C_2, \dots, C_m
3	3, 5, 6
4	3, 7, 12, 13
5	3, 5, 11, 22, 24
6	5, 11, 21, 43, 58, 61
8	3, 5, 12, 41, 48, 94, 130, 214
10	7, 17, 31, 65, 68, 143, 191, 194, 984, 996

5. 采用 π_s 的 FHT

A: 将 π_s 作用于测量矢量 η , 得 n 阶矢量

$$W = \pi_s(\eta), \text{ 即 } W(\pi_s(i)) = \eta_i.$$

B: 构造 $n+1$ 阶矢量

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ W \end{bmatrix}.$$

C: 用 FHT, 得 $n+1$ 阶矢量

$$Y = H_{n+1}X = M_{n+1}^{(1)} \cdot M_{n+1}^{(2)} \cdots M_{n+1}^{(m)} \cdot X$$

D: 略去 Y 中第一个分量, 得 n 阶矢量 Z .

E: 将 π_s 作用于矢量 Z , 并与 $-\frac{2}{n+1}$ 相乘得光谱估算值矢量 $\hat{\psi} = -\frac{2}{n+1} \pi_s(Z)$.

6. 应 用

我们在 255 阶阿达玛变换光谱仪测量汞灯 $1.53 \mu\text{m}$ 线光谱的实验中, 运用对称 π_s 变换和 FHT 处理实验数据. 对于 255 阶编码, 计算出相应的 255 阶 π_s 列矩阵. 其矩阵元 $\pi_s(i) (i=1, 2, \dots, 255)$ 如表 3 所示. 表中参数 p, q 与序数 i 的关系为 $i = p + 15(q-1)$.

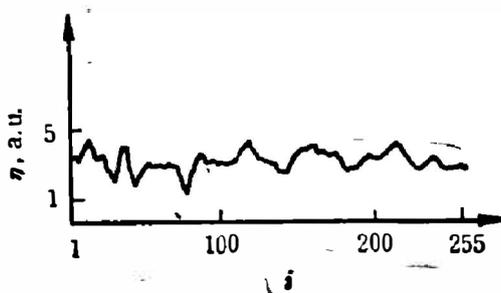


图 1 由 HTS 测得的汞灯 $1.5 \mu\text{m}$ 线光谱的编码图

Fig. 1 The encodegram from HTS to the spectrum of the $1.5 \mu\text{m}$ Hg vapor line.

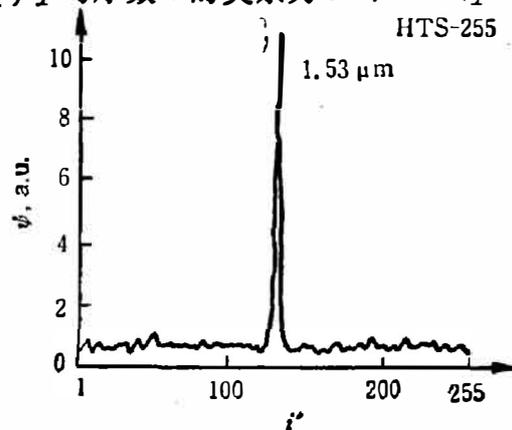


图 2 使用对称变换由 HTS 获得的汞灯 $1.5 \mu\text{m}$ 线光谱

Fig. 2 The spectrum of the $1.5 \mu\text{m}$ Hg vapor line obtained with HTS using the symmetric transformation.

如 $\pi_s(1) = 34$, $\pi_s(32) = 220$, $\pi_s(255) = 208$. 255 次测量数据点及解码后获得的光谱图分别如图 1 和图 2 所示. 图 1 中 i 为测量序数, 图 2 中 i' 为光谱元序数. 而用同样结构的常规光谱仪测量同样微弱的信号, 则光谱信息被淹没在噪声之中. 有关阿达玛变换光谱仪的设计和实验操作方法已在文献[1]中介绍, 本文则是对其实验数据处理方法的改进.

表 3 π_s 矩阵
Table 3 π_s matrix.

$q \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	34	196	2	163	121	108	174	231	36	143	93	113	248	209	192
2	234	186	199	67	244	173	166	115	91	168	172	68	93	227	204
3	150	220	94	162	155	66	22	131	30	23	97	48	175	5	10
4	55	6	75	96	210	129	189	110	13	158	72	33	133	85	119
5	179	177	18	107	7	169	78	106	229	135	246	14	223	31	245
6	79	136	203	63	146	52	71	28	180	24	92	1	226	46	184
7	100	58	152	3	65	87	212	202	221	188	140	35	38	44	27
8	29	86	54	228	101	216	182	187	37	109	76	201	156	235	88
9	233	251	144	151	62	112	26	255	120	142	128	95	64	181	250
10	114	185	134	20	32	103	123	207	215	139	138	104	70	254	154
11	160	56	59	122	45	249	51	238	82	222	253	219	247	236	241
12	167	145	117	16	200	126	197	224	141	193	8	148	127	39	206
13	53	165	50	12	124	102	153	225	111	239	176	240	69	191	205
14	116	242	230	198	161	218	21	194	73	195	171	237	19	137	41
15	17	42	80	125	132	183	89	11	213	40	243	4	232	25	190
16	47	90	74	130	252	57	217	84	149	157	9	118	81	159	170
17	15	61	49	77	43	178	83	60	211	99	147	214	105	164	208

参 考 文 献

- [1] 张复礼, 红外研究, 1(1982), 4: 301~305.
 [2] 张复礼, 光学仪器, 4(1982), ; 4: 38~42.
 [3] Fenimore E. E., *Applied Optics*, 22 (1983), 67 826~829.

SYMMETRIC TRANSFORMATION AND ITS APPLICATION IN HADAMARD TRANSFORM SPECTROMETRY

ZHANG FULLI, TIAN YUANYING

(Department of Physics, Tianjin University, 300072, Tianjin, China)

ABSTRACT

The method of generating symmetric matrices $\pi_s = \pi_1 = \pi_2$ is discussed in this paper. The spectrum of the 1.5 μm Hg vapor line is obtained with a singly encoded Hadamard transform spectrometer having 255 exit slits using the symmetric transformation. The amounts of storage and computational effort are reduced.